Câu I.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

+ Tập xác định: $x \neq -\frac{3}{2}$

+ y’ = $\frac{-1}{(2x+3)^2} < 0 \; \forall x \neq -\frac{3}{2}$

+ Tiệm cận

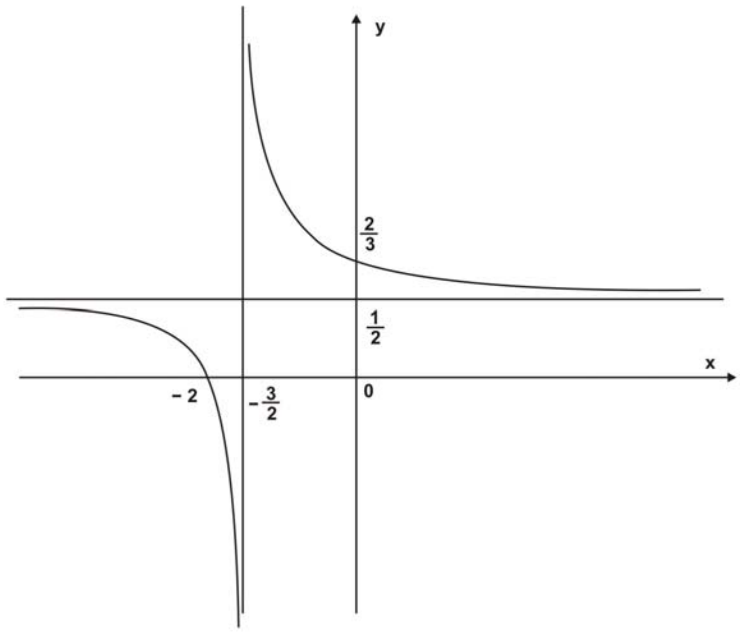
Vì $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+2}{2x+3} = \frac{1}{2}$ nên tiệm cận ngang là y = $\frac{1}{2}$

Vì $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{3}{2}\right)^{+}} \frac{x+2}{2x+3} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\left(\frac{3}{2}\right)^{-}} \frac{x+2}{2x+3} = -\infty$ nên tiệm cận đứng là x = - $\frac{3}{2}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'			‖		
y	$\frac{1}{2}$	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{2}$

Vẽ đồ thị: đồ thị cắt Oy tại $\left(0; \frac{2}{3}\right)$ và cắt Ox tại (-2; 0) bee.net.vn



2. Ta có $y' = \dfrac{-1}{(2x+3)^2}$ nên phương trình tiếp tuyến tại $x = x_0$ (với $x_0 \neq -\dfrac{3}{2}$) là:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y = \frac{-x}{(2x_0+3)^2} + \frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0+3)^2}$$

Do đó tiếp tuyến cắt Ox tại $A(2x_0^2 + 8x_0 + 6; 0)$

và cắt Oy tại $B\left(0; \dfrac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0+3)^2}\right)$

Tam giác OAB cân tại O $\Leftrightarrow$ OA = OB (với OA > 0)

$$\Leftrightarrow |x_A| = |y_B| \Leftrightarrow |2x_0^2 + 8x_0 + 6| = \left|\frac{2x_0^2 + 8x_0 + 6}{(2x_0+3)^2}\right|$$

$$\Leftrightarrow (2x_0+3)^2 = 1 \Leftrightarrow 2x_0 + 3 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1\,(L) \\ x_0 = -2\,(TM) \end{array}\right.$$

Với $x_0 = -2$ ta có tiếp tuyến $y = -x - 2$

Câu II.

1. ĐKXĐ: $\begin{cases} \sin x \neq -\dfrac{1}{2} \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi; x \neq \dfrac{-5\pi}{6} + k2\pi \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + 2l\pi \end{cases}$

Phương trình $\Leftrightarrow$ cosx - 2sinxcosx = $\sqrt{3}$ $(1 - \sin x + 2\sin x - 2\sin^2 x)$

$$\Leftrightarrow \cos x - \sin 2x = \sqrt{3} + \sqrt{3}\sin x - 2\sqrt{3}\sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sin 2x + \sqrt{3}(1 - 2\sin^2 x)$$

$$= \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \sin x.\cos\frac{5\pi}{6} + \cos x.\sin\frac{5\pi}{6} = \sin 2x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos 2x.\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + \frac{5\pi}{6} = 2x + \frac{\pi}{3} + m2\pi \\ x + \frac{5\pi}{6} = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + n2\pi \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x = -\frac{\pi}{2} + m2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{6} + n2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} - m2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3} \end{array}\right.$$

Kết hợp với đkxđ ta có họ nghiệm của pt là:

$$x = -\frac{\pi}{18} + n\frac{2\pi}{3}\ (n \in \mathbb{Z})$$

2. Đkxđ: $6 - 5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5}$ (*)

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt[3]{3x-2} \\ v = \sqrt{6-5x} \end{cases} (v \geq 0) \Rightarrow \begin{cases} u^3 = 3x-2 \\ v^2 = 6-5x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u + 3v = 8 \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = \frac{8-2u}{3} \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 \end{cases}$

$$\Rightarrow 15u^3 + 64 - 32u + 4u^2 - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow 15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0$$

$$\Leftrightarrow (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -2 \\ 15u^2 - 26u + 20 = 0 \quad \text{vô } n_0 \text{ do } \Delta' = 13^2 - 15.20 < 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow u = -2 \Rightarrow x = -2\,(\text{tm}).$$

Vậy phương trình có tập nghiệm là S={-2}

Câu III.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx$$

Ta có: $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x.dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x).dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$

Mặt khác xét $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x.\cos x.dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)^2 d(\sin x) = \left(\frac{1}{5}\sin^5 x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{15}$$

Vậy $I = I_1 - I_2 = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$

Câu IV.

Vì (SBI)và (SCI)vuông góc với (ABCD) nên $SI \perp (ABCD)$.

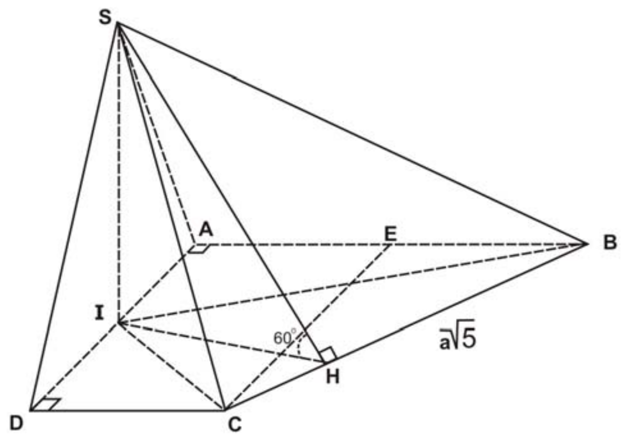
Ta có $IB = a\sqrt{5}; BC = a\sqrt{5}; IC = a\sqrt{2};$

Hạ $IH \perp BC$ tính được $IH = \frac{3a\sqrt{5}}{5};$

Trong tam giác vuông SIH có $SI = IH \ \tan 60^0 = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

$S_{ABCD} = S_{AECD} + S_{EBC} = 2a^2 + a^2 = 3a^2$ (E là trung điểm của AB).

$V = \frac{1}{3}S_{ABCD}SI = \frac{1}{3}3a^2\frac{3a\sqrt{15}}{5} = \frac{3a^3\sqrt{15}}{5}$.



Câu V.

Từ giả thiết ta có:

$x^2 + xy + xz = 3yz \Leftrightarrow (x + y)(x + z) = 4yz$

Đặt $a = x + y$ và $b = x + z$

Ta có: $(a – b)^2 = (y – z)^2$ và $ab = 4yz$

Mặt khác

$$a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 – ab + b)^2$$

$$\le \sqrt{2(a^2+b^2)}\left[(a-b)^2+ab\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(a-b)^2+2ab\right]}\left[(a-b)^2+ab\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(y-z)^2+2yz\right]}\left[(y-z)^2+4yz\right]$$

$$= \sqrt{2\left[(y+z)^2+4yz\right]}(y+z)^2$$

$$\le \sqrt{4(y+z)^2}\,(y+z)^2 = 2(y+z)^2 \quad (1)$$

Ta lại có:

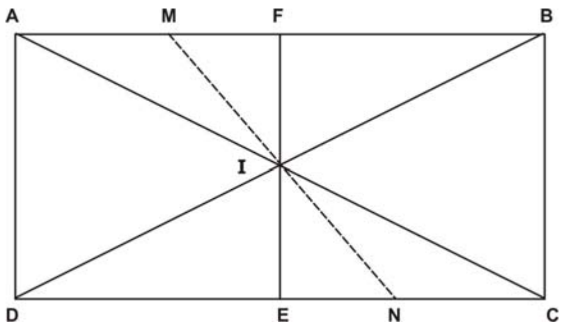
$3(x + y)(y +z)(z + x) = 12yz(y + z)$

$\le 3(y + z)^2 . (y + z) = 3(y + z)^3$ (2)

Cộng từng vế (1) và (2) ta có điều phải chứng minh

Câu VI .a

1. Gọi N là điểm đối xứng với M qua I, F là điểm đối xứng vơi E qua I.



Ta có $N \in DC$, $F \in AB$, $IE \perp NE$.

Tính được $N = (11; -1)$.

Giả sử $E = (x; y)$, ta có:

$\overrightarrow{IE} = (x - 6; y - 2)$; $\overrightarrow{NE} = (x - 11; y + 1)$.

$\overrightarrow{IE}.\overrightarrow{NE} = x^2 - 17x + 66 + y^2 - y - 2 = 0$ (1)

$E \in \Delta \Rightarrow x + y - 5 = 0$. (2)

Giải hệ (1), (2) tìm được $x_1 = 7$; $x_2 = 6$.

Tương ứng có $y_1 = -2$; $y_2 = -1 \Rightarrow E_1 = (7; -2)$; $E_2 = (6; -1)$

Suy ra $F_1 = (5; 6)$, $F_2 = (6; 5)$.

Từ đó ta có phương trình đường thẳng AB là $x - 4y + 19 = 0$ hoặc $y = 5$.

2. Mặt cầu có tâm I(1;2;3) bán kính R=5

Khoảng cách từ tâm I đến mp (P) là

$$d(I;(P)) = \frac{|2.1 - 2.2 - 3 - 4|}{\sqrt{4+4+1}} = 3.$$

Vì d(I;(P)) <R nên (P) cắt (S) theo đường tròn.

Gọi H là hình chiếu của I trên (P) thì H là giao của mp(P) với đường thẳng qua I, vuông góc với (P). Dễ dàng tìm được H= (3;0;2).

Bán kính đường tròn là: $\sqrt{R^2 - IH^2} = 4$.

Câu VII. a

Phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$

Ta có: $\Delta' = (-1)^2 - 10 = -9 = (3i)^2$

nên phương trình có hai nghiệm là:

$z_1 = -1 - 3i$ và $z_2 = -1 + 3i$

Suy ra $\begin{cases} |z_1|^2 = (-1)^2 + (-3)^2 = 10 \\ |z_2|^2 = (-1)^2 + (3)^2 = 10 \end{cases}$

Vậy $A = |z_1|^2 + |z_2|^2 = 10 + 10 = 20$

Chương trình nâng cao

Câu VI. b

1. $(C): (x+2)^2 + (y+2)^2 = (\sqrt{2})^2$

Đường tròn (C) có tâm I(-2;-2); bán kính $R = \sqrt{2}$

$\Delta: x + my - 2m + 3 = 0$

Gọi H là hình chiếu của I trên Δ.

- Để Δ cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B phân biệt thì: IH<R
- Khi đó $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2} IH.AB = IH.HA \leq \frac{IH^2 + HA^2}{2} = \frac{IA^2}{2} = \frac{R^2}{2} = 1$

$\Rightarrow (S_{\Delta IAB})_{max} = 1$ khi $IH = HA = 1$ (hiển nhiên $IH < R$)

$\Leftrightarrow \frac{|1-4m|}{\sqrt{m^2+1}} = 1 \Leftrightarrow |1-4m| = \sqrt{m^2+1} \Leftrightarrow 1 - 8m + 16m^2 = m^2 + 1$

$\Leftrightarrow 15m^2 - 8m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ m = \frac{8}{15} \end{array}\right.$

Vậy, có 2 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu là: m = 0 và $m = \frac{8}{15}$

2. Giả sử M(a;b;c) là điểm cần tìm.

- Vì $M \in \Delta_1$ nên: $\frac{a+1}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c+9}{6} \Rightarrow \begin{cases} a = b - 1 \\ c = 6b - 9 \end{cases}$
- Khoảng cách từ M đến mp (P) là:

$$d = d(M;(P)) = \frac{|a - 2b + 2c - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|11b - 20|}{3}$$

- Gọi (Q) là mp qua M và vuông góc với Δ_2, ta có:

$\vec{n}_{(Q)} = \vec{u}_{\Delta_2} = (2;1;-2)$

$\Rightarrow (Q): 2(x-a) + 1(y-b) - 2(z-c) = 0$

Hay (Q): $2x + y - 2z + 9b - 16 = 0$

Gọi H là giao điểm của (Q) và $\Delta_2 \Rightarrow$ Tọa độ H là nghiệm của hpt:

$$\begin{cases} 2x+y-2z+9b-16=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+1}{-2} \end{cases}$$

$$\rightarrow H(-2b+3;-b+4;2b-3)$$

$$\rightarrow MH^2=(3b-4)^2+(2b-4)^2+(4b-6)^2=29b^2-88b+68$$

Yêu cầu bài toán trở thành:

$$MH^2=d^2$$

$$\Leftrightarrow 29b^2-88b+68=\frac{(11b-20)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 261b^2-792b+612=121b^2-440b+400$$

$$\Leftrightarrow 140b^2-352b+212=0$$

$$\Leftrightarrow 35b^2-88b+53=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=\dfrac{53}{35} \end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm thoả mãn là: M(0;1;-3) và $M\left(\frac{18}{35};\frac{53}{35};\frac{3}{35}\right)$

Câu VII b.

Điều kiện $\begin{cases} x^2+y^2>0 \\ xy>0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad xy>0$

Viết lại hệ dưới dạng:

$$\begin{cases} \log_2(x^2+y^2)=\log_2(2xy) \\ 3^{x^2-xy+y^2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2xy \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=0 \\ x^2-xy+y^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)\in\{(2;2);(-2;-2)\}: \text{thỏa mãn}$$

Nhóm chuyên gia giải đề:

TS. Lê Thống Nhất, ThS Đặng Văn Quản, ThS Nguyễn Xuân Bình, Hoàng Trọng Hảo