

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC NĂM 2012
Môn : TOÁN; khối B

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3m^3$ (1), m là tham số thực.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
- Tìm m để đồ thị hàm số (1) có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 48.

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$.

Câu 3 (1,0 điểm) Giải bất phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$.

Câu 4 (1,0 điểm) Tính tích phân $I = \int_0^1 \frac{x^3}{x^4 + 3x^2 + 2} dx$.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ với $SA = 2a$, $AB = a$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SC . Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (ABH) . Tính thể tích của khối chóp $S.ABH$ theo a .

Câu 6 (1,0 điểm) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x^5 + y^5 + z^5$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm) : Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng có hệ tọa độ Oxy , cho các đường tròn $(C_1) : x^2 + y^2 = 4$, $(C_2) : x^2 + y^2 - 12x + 18 = 0$ và đường thẳng $d : x - y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc (C_2) , tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho AB vuông góc với d .

Câu 8.a (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}$ và hai điểm $A(2;1;0)$, $B(-2;3;2)$. Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d .

Câu 9.a (1,0 điểm) Trong một lớp học gồm có 15 học sinh nam và 10 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Tính xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam và nữ.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thoi $ABCD$ có $AC = 2BD$ và đường tròn tiếp xúc với các cạnh của hình thoi có phương trình $x^2 + y^2 = 4$. Viết phương trình chính tắc của elip (E) đi qua các đỉnh A, B, C, D của hình thoi. Biết A thuộc Ox .

Câu 8.b (1,0 điểm) Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0;0;3)$, $M(1;2;0)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A và cắt các trục Ox, Oy lần lượt tại B, C sao cho tam giác ABC có trọng tâm thuộc đường thẳng AM .

Câu 9.b (1,0 điểm) Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm phức của phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2

BÀI GIẢI

Câu 1:

- $m = 1$, hàm số thành : $y = x^3 - 3x^2 + 3$. Tập xác định là $\mathbb{R}$.
 $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2$; $y(0) = 3$; $y(2) = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

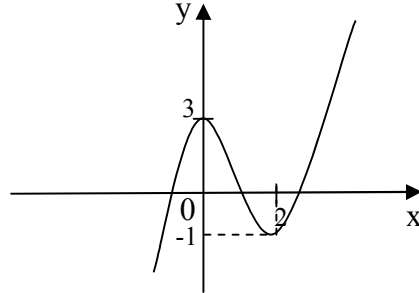
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	+	0	-	0
y	$-\infty$	3	-1	$+\infty$
		CD	CT	

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$; $(2; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$; $y(0) = 3$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y(2) = -1$

$y'' = 6x - 6$; $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Điểm uốn I (1; 1)

Đồ thị :



b) $y' = 3x^2 - 6mx$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hay $x = 2m$

y có 2 cực trị $\Leftrightarrow m \neq 0$

Vậy A $(0; 3m^3)$ và B $(2m; -m^3)$

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} |-6m^4| = 48 \Leftrightarrow m^4 = 16 \Leftrightarrow m = \pm 2 \text{ (nhận so với đk)}$$

Câu 2 : $2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$

$$\Leftrightarrow (2 \cos x + 1)(\cos x - 1) + \sqrt{3} \sin x(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos x + 1 = 0 \\ \cos x + \sqrt{3} \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = k2\pi \end{cases}$$

Câu 3 : Giải bất phương trình $x + 1 + \sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 3\sqrt{x}$. Đk : $0 \leq x \leq 2 - \sqrt{3}$ hay $x \geq 2 + \sqrt{3}$
nhận xét $x = 0$ là nghiệm

+ Với $x \neq 0$, BPT $\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x + \frac{1}{x} - 4} \geq 3$

Đặt $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x + \frac{1}{x} = t^2 - 2$ ($t \geq 2$)

Ta có : $t + \sqrt{t^2 - 6} \geq 3 \Leftrightarrow \sqrt{t^2 - 6} \geq 3 - t \Leftrightarrow t \geq 3$ hay $\begin{cases} t \leq 3 \\ t^2 - 6 \geq 9 - 6t + t^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{5}{2} \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{4} \text{ hay } x \geq 4$$

Kết hợp với đk $\Rightarrow 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ hay $x \geq 4$.

Câu 4 : Đặt $t = x^2 \Rightarrow \frac{dt}{2} = xdx$; $x = 0 \Rightarrow t = 0$; $x = 1 \Rightarrow t = 1$

$$I = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{tdt}{t^2 + 3t + 2} = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{-1}{t+1} + \frac{2}{t+2} \right) dt = \frac{1}{2} (2\ln 3 - 3\ln 2)$$

Câu 5

Nối BH ta có tam giác ABH cân tại H, do tính chất đối xứng
 $\Rightarrow SC \perp BH$. Vậy $SC \perp (ABH)$.

Gọi SD là chiều cao của tam giác SAB

$$\Rightarrow SD^2 = (2a)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{15a^2}{4} \Rightarrow SD = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$S_{(SAB)} = \frac{1}{2} a \cdot \frac{a\sqrt{15}}{2} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}$$

$$S_{(SAB)} = S_{(SAC)} = \frac{1}{2} AH \cdot SC = \frac{a^2\sqrt{15}}{4} \Rightarrow AH = \frac{a^2\sqrt{15}}{2 \cdot 2a} = \frac{a\sqrt{15}}{4}$$

$$\text{Ta có } SH^2 = (2a)^2 - AH^2 = 4a^2 - \frac{15a^2}{16} = \frac{49a^2}{16} \Rightarrow SH = \frac{7a}{4} \Rightarrow \frac{SH}{SC} = \frac{7a}{4 \cdot 2a} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{V_{(SABH)}}{V_{(SABC)}} = \frac{SH}{SC} = \frac{7}{8}; SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3 \cdot 2}\right)^2 = \frac{15a^2}{4} - \frac{a^2}{12} = \frac{44a^2}{12} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{11}a}{\sqrt{3}}$$

$$V_{(SABH)} = \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \cdot \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{7a^3\sqrt{11}}{96}$$

Câu 6.
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = (x+y)^2 - \frac{1}{2} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \leq x+y \leq \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$$

$$P = x^5 + y^5 + z^5 = x^5 + y^5 - (x+y)^5 = -5xy(x^3 + y^3) - 10x^2y^2(x+y)$$

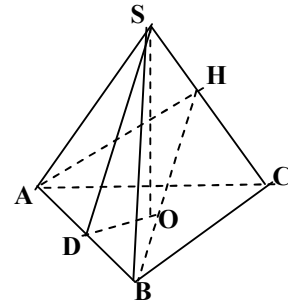
$$= -\frac{5}{2} \left[(x+y)^3 - \frac{1}{2}(x+y) \right] = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{5}{4}t; \quad t = x+y$$

$$f(t) = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{5}{4}t$$

$$f'(t) = -\frac{15}{2}t^2 + \frac{5}{4}$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}$$

t	$-\sqrt{2/3}$	$-1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{6}$	$\sqrt{2/3}$	
f'(t)	-	0	+	0	-
f(t)	$5\sqrt{6}/36$			$5\sqrt{6}/36$	



$$\begin{array}{c} \hline -5\sqrt{6}/36 \\ \hline \end{array}$$

Vậy $P \leq 5\sqrt{6}/36$. Vậy $\max P = 5\sqrt{6}/36$ xảy ra khi $t = 1/\sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 1/\sqrt{6} \\ xy = -1/3 \\ z = -(x+y) \end{cases} \quad (\text{có nghiệm}) \quad \text{hay} \quad \begin{cases} x+y = -\sqrt{2/3} \\ xy = 1/6 \\ z = -(x+y) \end{cases} \quad (\text{có nghiệm})$$

Câu 7a. Phương trình đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$

Phương trình đường thẳng AB : $-2ax - 2by + c = 4 \Rightarrow AB$ có vtcp $\vec{v}(b; -a)$

Đường thẳng (d) có vtcp $\vec{u}(1; 1)$ vì $(d) \perp AB \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow a = b$ (1)

$$d_{(I, d)} = \frac{|a - b - 4|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \Leftrightarrow 8 = 2a^2 - c \quad (2)$$

$$I \in (C_2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \quad (3)$$

Thế (1) vào (3) ta có : $a = b = 3$

Thế $a = b = 3$ vào (2) ta có : $c = 10$

Vậy phương trình đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 10 = 0$

Cách khác : Gọi $I(a; b) \in (C_2)$; vì đường tròn tâm I cắt (C_1) tâm O tại A, B sao cho $AB \perp (d)$.

Mà $IO \perp AB \Rightarrow IO \perp (d)$. Vậy $d_{(I/d)} = d_{(O/d)} = 2\sqrt{2} = R$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \\ |a - b - 4| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \\ a - b = 8 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} a^2 + b^2 - 12a + 18 = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad (2) \end{cases}$$

Hệ (1) $\Leftrightarrow a = 7 \pm 2\sqrt{2}; b = -1 \pm 2\sqrt{2}$; (loại) vì I và O phải cùng phía so với (d).

Hệ (2) $\Leftrightarrow a = b = 3 \Rightarrow a^2 - 6a + 9 = 0 \Rightarrow a = 3$

Phương trình đường tròn : $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

Câu 8a.

Gọi tâm mặt cầu là $I \in (d) \Leftrightarrow I(1+2t; t; -2t)$

$$IA^2 = 9t^2 - 6t + 2, IB^2 = 9t^2 + 14t + 22$$

Ta có $IA^2 = IB^2 \Rightarrow t = -1 \Rightarrow I(-1; -1; 2), IA^2 = R^2 = 17$

Vậy phương trình mặt cầu là : $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 17$

Câu 9a. Số cách gọi 4 học sinh lên bảng là : $C_{25}^4 = \frac{25!}{4!.21!} = 12650$

Số cách gọi 4 học sinh có cả nam lẫn nữ là :

$$\text{TH 1: 1 nữ 3 nam có : } 10.C_{15}^3 = 10.455 = 4550$$

$$\text{TH 2: 2 nữ 2 nam có : } C_{10}^2 \cdot C_{15}^2 = 4725$$

$$\text{TH 3 : 3 nữ 1 nam có : } C_{10}^3 \cdot C_{15}^1 = 1800$$

Vậy số cách gọi 4 học sinh có nam và nữ là : $4550 + 4725 + 1800 = 11075$

Vậy xác suất để 4 học sinh được gọi có cả nam lẫn nữ là : $\frac{11075}{12650} = \frac{443}{506}$

Cách khác: Xác suất chọn không có nam: $P_1 = \frac{C_{10}^4}{C_{25}^4} = \frac{21}{1265}$

$$\text{Xác suất chọn không có nữ : } P_2 = \frac{C_{15}^4}{C_{25}^4} = \frac{273}{2530}$$

$$\text{Xác suất có cả nam và nữ : } P = 1 - (P_1 + P_2) = \frac{443}{506}$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b. Đặt $AC = 2a$, $BD = a$. Bán kính đường tròn nội tiếp hình thoi $R = 2$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{a^2} \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5} \Rightarrow b = \sqrt{5}$$

$$\text{Vậy phương trình của (E) : } \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$$

Câu 8b. Gọi B là giao điểm của mặt phẳng với Ox, $B(b;0;0)$.

C là giao điểm của mặt phẳng với Oy, $C(0;c;0)$.

Vậy pt mặt phẳng có dạng : $\frac{x}{b} + \frac{y}{c} + \frac{z}{3} = 1$ và trọng tâm tam giác ABC là : $G\left(\frac{b}{3}; \frac{c}{3}; 1\right)$

$$\overrightarrow{AM} = (1; 2; -3). \text{ Pt đường thẳng AM : } \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-3}$$

$$\text{Vì } G \in AM \text{ nên } \frac{b}{3} = \frac{c}{6} = \frac{-2}{3} \Rightarrow b = -2, c = -4$$

Vậy pt mặt phẳng (P) là $6x + 3y - 4z + 12 = 0$

Câu 9b. Phương trình $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$ có hai nghiệm là $z_1 = -1 + \sqrt{3}i, z_2 = 1 + \sqrt{3}i$

Vậy dạng lượng giác của z_1, z_2 là : $z_1 = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right); z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right); z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

TS. Lê Xuân Tường
(ĐH Kinh tế TP.HCM)