

ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC KHỐI D NĂM 2012
Môn thi : TOÁN

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu 1 (2,0 điểm). Cho hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ (1), m là tham số thực.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.

b) Tìm m để hàm số (1) có hai điểm cực trị x_1 và x_2 sao cho $x_1.x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

Câu 2 (1,0 điểm) Giải phương trình $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$

Câu 3 (1,0 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 4 (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_0^{\pi/4} x(1 + \sin 2x)dx$.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông, tam giác $A'AC$ vuông cân, $A'C = a$. Tính thể tích khối tứ diện $ABB'C'$ và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD') theo a .

Câu 6 (1,0 điểm). Cho các số thực x, y thỏa mãn $(x - 4)^2 + (y - 4)^2 + 2xy \leq 32$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^3 + y^3 + 3(xy - 1)(x + y - 2)$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được làm một trong hai phần riêng (phần A hoặc phần B)

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7.a (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình chữ nhật ABCD. Các đường thẳng AC và AD lần lượt có phương trình là $x + 3y = 0$ và $x - y + 4 = 0$; đường thẳng BD đi qua điểm $M(-\frac{1}{3}; 1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

Câu 8.a (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P): $2x + y - 2z + 10 = 0$ và điểm $I(2; 1; 3)$. Viết phương trình mặt cầu tâm I cắt (P) theo một đường tròn có bán kính bằng 4.

Câu 9.a (1,0 điểm): Cho số phức z thỏa mãn $(2 + i)z + \frac{2(1 + 2i)}{1 + i} = 7 + 8i$. Tìm môđun của số phức $w = z + 1 + i$.

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7.b (1,0 điểm). Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường thẳng $d: 2x - y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d , cắt trục Ox tại A và B, cắt trục Oy tại C và D sao cho $AB = CD = 2$.

Câu 8.b (1,0 điểm). Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(2; -1; 0)$. Xác định tọa độ điểm M thuộc d sao cho tam giác AMB vuông tại M.

Câu 9.b (1,0 điểm). Giải phương trình $z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$ trên tập hợp các số phức.

BÀI GIẢI

Câu 1:

a) $m = 1$, hàm số thành $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x + \frac{2}{3}$. Tập xác định là $\mathbb{R}$.

$$y' = 2x^2 - 2x - 4; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ hay } x = 2; y(-1) = 3; y(2) = -6$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty \text{ và } \lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$$

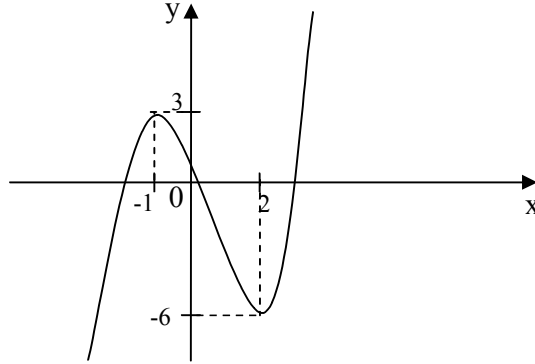
x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3 CĐ	$\searrow$	-6 CT	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$; $(2; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên $(-1; 2)$

Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$; $y(-1) = 3$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$; $y(2) = -6$

$$y'' = 4x - 2; y'' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}. \text{ Điểm uốn I } \left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$$

Đồ thị:



b) $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1)$

$$y \text{ có 2 cực trị} \Leftrightarrow \Delta' = m^2 + 4(3m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0$$

$$\Leftrightarrow m < \frac{-2}{\sqrt{13}} \text{ hay } m > \frac{2}{\sqrt{13}}$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của y' : $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$

$$\Leftrightarrow -(3m^2 - 1) + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ (loại) hay } m = \frac{2}{3} \text{ (nhận)}$$

Câu 2: $\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x \Leftrightarrow \sin 3x - \sin x + \cos 3x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos 2x + 2\cos x \cos x = \sqrt{2} \cos 2x \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ hay } 2\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \text{ hay } \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \text{ hay } x = -\frac{\pi}{12} + k2\pi \text{ hay } x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi \text{ (với } k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 3: $\begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ 2x^3 - x^2y + x^2 + y^2 - 2xy - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ (x^2 - y)(2x - y + 1) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ x^2 = y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} xy + x - 2 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + x - 2 = 0 \\ x^2 = y \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} 2x^2 + 2x - 2 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ y = \sqrt{5} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ y = -\sqrt{5} \end{cases}$$

Câu 4:

$$I = \int_0^{\pi/4} x(1 + \sin 2x) dx. \text{ Đặt } u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = (1 + \sin 2x)dx, \text{ chọn } v = x - \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$I = x(x - \frac{1}{2} \cos 2x) \Big|_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} (x - \frac{1}{2} \cos 2x) dx = \frac{\pi^2}{16} - \left[\frac{x^2}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{4}$$

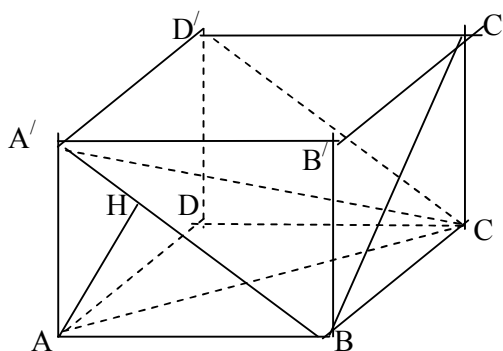
Câu 5:

$$A'C = a \Rightarrow AC = \frac{a}{\sqrt{2}}, BC = \frac{a}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{a}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \frac{a}{\sqrt{2}} \right) \right] \frac{a}{2} = \frac{a^3}{24\sqrt{2}}$$

Hạ AH vuông góc A'B trong tam giác ABA'
Chính là d(A, BCD') = h

$$\text{Ta có } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{6}}$$



Câu 6: Ta có

- $(x-4)^2 + (y-4)^2 + 2xy \leq 32 \Leftrightarrow (x+y)^2 - 8(x+y) \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x+y \leq 8$
- $4xy \leq (x+y)^2 \Rightarrow -6xy \geq -\frac{3}{2}(x+y)^2$

$$A = x^3 + y^3 + 3(xy-1)(x+y-2) = (x+y)^3 - 6xy - 3(x+y) + 6$$

$$A \geq (x+y)^3 - \frac{3}{2}(x+y)^2 - 3(x+y) + 6$$

$$\text{Đặt } t = x+y \ (0 \leq t \leq 8), \text{ xét } f(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 - 3t + 6 \Rightarrow f'(t) = 3t^2 - 3t - 3$$

$$f'(t) = 0 \text{ khi } t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; f(0) = 6, f(8) = 398, f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{17-5\sqrt{5}}{4}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của } f(t) \text{ là } \frac{17-5\sqrt{5}}{4} \text{ xảy ra khi } t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$A \geq f(t) \geq \frac{17-5\sqrt{5}}{4}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } x=y \text{ và } x+y = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ hay } x=y = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

PHẦN RIÊNG

A. Theo chương trình Chuẩn

Câu 7a: AC cắt AD tại A (-3; 1)

$$\text{Vẽ } MN \parallel AD \ (N \in AC) \Rightarrow MN : 3x - 3y + 4 = 0$$

$$\text{Trung điểm của } MN : K \left(-\frac{4}{6}; \frac{4}{6}\right)$$

$$\text{Vẽ } KE \perp AD \ (E \in AD) \Rightarrow KE : \left(x + \frac{4}{6}\right) + \left(y - \frac{4}{6}\right) = 0 \Rightarrow E (-2; 2)$$

$$E \text{ là trung điểm } AD \Rightarrow D (-1; 3). \text{ Giao điểm của } AC \text{ và } EK : I (0; 0)$$

$$I \text{ là trung điểm } BD \Rightarrow B (1; -3). \text{ I là trung điểm } AC \Rightarrow C (3; -1)$$

Câu 8a: $IH = d(I, (P)) = \frac{|4+1-6+10|}{\sqrt{9}} = 3; \quad R^2 = IH^2 + r^2 = 9 + 16 = 25$

$$(S) : (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = 25.$$

Câu 9a : $(2+i)z + (1+2i)(1-i) = 7+8i \Leftrightarrow (2+i)z + 1+i-2i^2 = 7+8i$

$$\Leftrightarrow (2+i)z = 7i+4 \qquad \Leftrightarrow z = \frac{(7i+4)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = 3+2i$$

$$\text{Suy ra : } w = z + 1 + i = 4 + 3i \Rightarrow |w| = \sqrt{16+9} = 5$$

B. Theo chương trình Nâng cao

Câu 7b: $I \in (d) \Rightarrow I(t; 2t+3)$. $AB = CD \Rightarrow |t| = |2t+3| \Leftrightarrow t = -1$ hay $t = -3$

$$+ t = -1 \Rightarrow I(-1; 1) \Rightarrow R = \sqrt{2} \Rightarrow \text{pt đường tròn : } (x+1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

$$+ t = -3 \Rightarrow I(-3; -3) \Rightarrow R = \sqrt{10} \Rightarrow \text{pt đường tròn : } (x+3)^2 + (y+3)^2 = 10$$

Câu 8b: Gọi $M(2t+1; -1-t; t)$ thuộc (d)

$$\Delta AMB \text{ vuông tại } M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = (2t; -t; t-2) \text{ vuông góc với } \overrightarrow{BM} = (2t-1; -t; t)$$

$$\Leftrightarrow 6t^2 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0 \text{ hay } t = \frac{2}{3}. \text{ Vậy } M(1; -1; 0) \text{ hay } M\left(\frac{7}{3}; -\frac{5}{3}; \frac{2}{3}\right).$$

Câu 9b: $z^2 + 3(1+i)z + 5i = 0$

$$\Delta = 9(1+i)^2 - 20i = -2i = (1-i)^2$$

$$z = \frac{-3(1+i) \pm (1-i)}{2} \Leftrightarrow z = -1-2i \text{ hay } z = -2-i.$$

ThS. Đào Bảo Dũng, TS. Lê Xuân Trường
(Trung tâm LTĐH Vĩnh Viễn – TP.HCM)